Set 1

Jaime Benabent

November 21, 2020

Problema 1. Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que para cada $a, b \in \mathbb{Z}$ verifican

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

.

Problema 2. Sean $(a_1, b_1), (a_2, b2), \ldots, (a_{100}, b_{100})$ pares ordenados distintos de enteros no-negativos. Sea N el número de pares (i, j) verificando $1 \leq i < j \leq 100$ y $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Determinar el mayor valor posible de N sobre todas las posibles elecciones de los cien pares.

Problema 3. Sea n un entero positivo. En un estante hay n libros, cada libro tiene una anchura y una altura de manera que no existen dos libros de igual anchura ni dos libros de igual altura.

Los libros comienzan en el estante ordenados de menor a mayor altura. En cada paso se pueden elegir dos libros consecutivos tal que el de la derecha sea mas alto y el de la izquierda mas ancho e intercambiar sus posiciones.

Probar que tras un número finito de pasos no hay mas movimientos y que en tal momento los libros quedan ordenados en orden creciente de anchura.

Problema 4. En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. El punto E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y solo si $AC = EC$.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos. Hay $a + b$ cuencos en fila, numerados del 1 al $a + b$. Inicialmente cada uno de los primeros a cuencos contiene una manzana y cada uno de los últimos b cuencos contiene una pera. Un movimiento consiste en llevar una manzana del cuenco i al $i + 1$ y una pera del cuenco j al $j - 1$ con $i - j$ par. Demuestra que tras un número finito de movimientos es posible acabar con una pera en los primeros b cuencos y una manzana en los últimos a cuencos si y solo si ab es par.

Problema 6. Sean n ladrillos de tal manera que cada ladrillo pesa al menos 1 y que el peso de todos los ladrillos es $2n$. Prueba que para cada real r con $0 \leq r \leq 2n$ podemos elegir un subconjunto de ladrillos que pesen al menos r y a lo sumo $r + 2$.

Problema 7. Para que pares de enteros (a, b) existen aplicaciones $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ verificando para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$f(g(n)) = n + a; \qquad g(f(n)) = n + b;$$

Problema 8. Sean r y s dos rectas paralelas y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90$ y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de que punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.